Devoirs de contrôle N°1

QCM:

Pour chacune des propositions suivantes, dites si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse:

1) Si une fonction f est bornée sur un domaine $\mathscr{D}$, alors elle admet un maximum et un minimum sur $\mathscr{D}$.
2) La fonction f définie sur $[-1,+\infty[$ par: $f(x)=\frac{3x}{1-|x|}$ est impaire.
3) $(O,\vec{i},\vec{j})$ étant un repère orthonormé, $\vec{u}=-\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{v}=3\vec{j}$ deux vecteurs, alors $\vec{u}.\vec{v}=-3$.
4) Si $||\vec{u}+\vec{v}||=||\vec{u}||+||\vec{v}||$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires.

Exercice 1:

Soient $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-1$ et $g(x)=\frac{-3}{x+3}$ deux fonctions.
Soient $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ leurs représentations graphiques dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer les domaines de définition de f et de g.
2) a) Donner la forme canonique de f.
   b) Déduire les variations de f sur les intervalles $]-\infty,-2]$ et $[-2,+\infty[$.
   c) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathscr{C}_f)$ courbe représentative de f.
   d) Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) a) Etudier la parité de g.

b) Montrer, par le calcul, que $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ ont trois points d'intersection A, B et C dont on déterminera les coordonnées.

c) Justifier que $(\mathscr{C}_g)$ est une hyperbole préciser le centre et les asymptotes.

d) Tracer $(\mathscr{C}_g)$ dans le meme repère que $(\mathscr{C}_f)$ et placer les points A, B et C.

4) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $h(x) = \frac{-3}{|x|+3}$.

a) Montrer que h est paire.

b) Montrer que h est majorée par 0 et minoré par -1 sur $\mathbb{R}$.

c) Etudier les variations de h sur $]-\infty, 0]$ puis sur $[0, +\infty[$

d) Montrer que la restrictions de h à $[0, +\infty[$ est égale à g.

e) Construire, dans le meme repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $(\mathscr{C}_h)$ à partie celle de g.

5) Résoudre graphiquement:

a) $\frac{-3}{x+3} \geq 0$

b) $\frac{-3}{x+3} \geq \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$

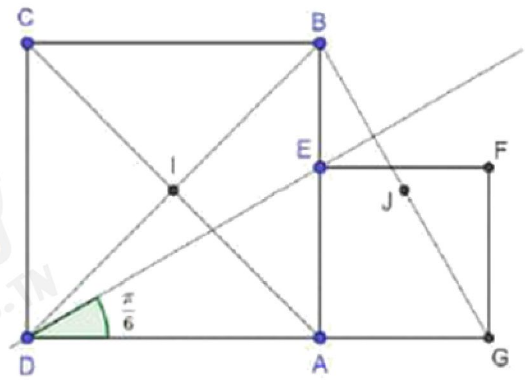
c) $h(x) > \frac{-1}{2}$

Exercice 2:

Dans la figure ci-contre, on considère les deux carrés $ABCD$ et $AEFG$ où $AB = \sqrt{3}$ et E est le point du segment $[AB]$ tel que $\widehat{ADE} \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} = 3$.

b) En déduire que $DE = 2$ puis $AE = 1$.



2) a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AG}$.

b) En déduire que les droites $(DE) \perp (BG)$.

3) a) Montrer que $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DB} = 3 + \sqrt{3}$.

b) Vérifier l'égalité $\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

c) En déduire que $cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

4) Soit I le milieu du segment $[AC]$.

a) Montrer que pour tout point M du plan on a:
$MA^2 + MC^2 = MI^2 + 3$.

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan tels que
$MA^2 + MC^2 = 7$.

5) On considère le repère $(O, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AE})$ et soit J le milieu de $[BG]$.

a) Déterminer lezs coordonnées des points A, G, E, B et J.

b) Calculer $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AJ}$.

c) Déduire la mesure de l'angle $\widehat{GAJ}$.